1 Магнитное поле с поперечным градиентом.

Представим себе неоднородное магнитное поле следующей конфигурации. Вектор поля направлен вдоль оси x, величина поля меняется вдоль оси y - градиент поля $\vec{\nabla} H$ направлен вдоль y и постоянен, т.е. величина поля растет с ростом y. Обозначим единичные вектора, направленные вдоль осей x, y, z буквами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, соответственно. Требуется найти силу, действующую на заряженную частицу, движущуюся в плоскости поперечной к полю.

Рассмотрим движение частицы в таком поле. Если поле постоянно во времени и однородно в пространстве, как известно, частица в плоскости перпендикулярной полю движется по окружности радиуса $\rho = \frac{mv_\perp c}{eH}$. Сила, действующая на частицу со стороны поля $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{e}{c}[\vec{v}; \vec{H}(\vec{r})]$.

Приближенно можно вычислить искомую силу, как среднее значение ларморовских сил "вверху" и "внизу" траектории, т.е. там, где поле сильнее и слабее соответственно. Пусть $\vec{r}_0$ - радиус-вектор частицы в начальный момент времени, а $\vec{r}_0 + \vec{\rho}$ - радиус-вектор после половины оборота по ларморовскому кружку. Тогда

$$< \vec{F} >= \frac{\vec{F}(\vec{r}_0 + \vec{\rho}) + \vec{F}(\vec{r}_0)}{2},$$

$$\vec{F}(\vec{r}_0) = \frac{e}{c}[\vec{v}(r_0); \vec{H}(\vec{r}_0)].$$

Пусть $\vec{v}(\vec{r}_0) = v\vec{k}$, тогда

$$\vec{F}(\vec{r}_0) = \frac{e}{c}[v\vec{k}; H\vec{i}] = \vec{j}\frac{e}{c}vH.$$

Для нахождения $\vec{F}(\vec{r}_0 + \vec{\rho})$ необходимо сначала найти $\vec{H}(\vec{r}_0 + \vec{\rho})$.

Воспользуемся разложением Тейлора

$$\vec{H}(\vec{r}_0 + \vec{\rho}) = \vec{H}(\vec{r}_0) + (\vec{\rho}\vec{\nabla})\vec{H}(\vec{r}_0) + \frac{1}{2!}(\vec{\rho}\vec{\nabla})^2\vec{H}(\vec{r}_0) + ... + \frac{1}{n!}(\vec{\rho}\vec{\nabla})^n\vec{H}(\vec{r}_0) + ...$$

оборвав эту сумму на втором слагаемом, что возможно при $(\vec{\rho}\vec{\nabla})^2\vec{H}(\vec{r}_0) << (\vec{\rho}\vec{\nabla})\vec{H}(\vec{r}_0)$, получим

$$\vec{H}(\vec{r}_0 + \vec{\rho}) = \vec{H}(\vec{r}_0) + (\vec{\rho}\vec{\nabla})\vec{H}(\vec{r}_0).$$

Вычислим это выражение. Для этого вначале запишем все вектора в декартовой системе координат.

$$\vec{\rho} = \{\rho_x; \rho_y; \rho_z\},$$

$$\vec{\nabla} = \{\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\},$$

$$\vec{H} = \{H_x; H_y; H_z\}.$$

Тогда получим, что

$$(\vec{\rho}\vec{\nabla}) = \rho_x\frac{\partial}{\partial x} + \rho_y\frac{\partial}{\partial y} + \rho_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Отсюда следует, что

$$
\begin{aligned}
(\vec{\rho}\vec{\nabla})\vec{H} = (\rho_x \tfrac{\partial}{\partial x} + \rho_y \tfrac{\partial}{\partial y} + \rho_z \tfrac{\partial}{\partial z}) * (H_x\vec{i} + H_y\vec{j} + H_z\vec{k}) = \\
= (\rho_x \tfrac{\partial H_x}{\partial x} + \rho_y \tfrac{\partial H_x}{\partial y} + \rho_z \tfrac{\partial H_x}{\partial z})\vec{i} + \\
+ (\rho_x \tfrac{\partial H_y}{\partial x} + \rho_y \tfrac{\partial H_y}{\partial y} + \rho_z \tfrac{\partial H_y}{\partial z})\vec{j} + \\
+ (\rho_x \tfrac{\partial H_z}{\partial x} + \rho_y \tfrac{\partial H_z}{\partial y} + \rho_z \tfrac{\partial H_z}{\partial z})\vec{k} = \\
= (\vec{\rho}\vec{\nabla}H_x)\vec{i} + (\vec{\rho}\vec{\nabla}H_y)\vec{j} + (\vec{\rho}\vec{\nabla}H_z)\vec{k}
\end{aligned}
$$

Поскольку у нас по условию задачи существует только компонента $H_x = H$, то

$$(\vec{\rho}\vec{\nabla})\vec{H} = (\vec{\rho}\vec{\nabla}H)\vec{i},$$

$$\vec{\nabla}H = \frac{\partial H_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial H}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial H}{\partial z}\vec{k} = \frac{\partial H}{\partial y}\vec{j},$$

то есть

$$(\vec{\rho}\vec{\nabla})\vec{H} = (\vec{\rho}\vec{\nabla}H)\vec{i} = \rho\vec{j}\frac{\partial H}{\partial y}\vec{j} = \rho\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Получается, что

$$\vec{H}(\vec{r}_0 + \vec{\rho}) = (H + \rho\frac{\partial H}{\partial y})\vec{i}.$$

Тогда

$$\vec{F}(\vec{r}_0 + \vec{\rho}) = \frac{e}{c}[\vec{v}(r_0 + \vec{\rho}); \vec{H}(\vec{r}_0 + \vec{\rho})],$$

где $\vec{v}(r_0 + \vec{\rho}) = -\vec{v}(r_0) = -v\vec{k}$.

Подставив, все необходимые выражения, получим, что

$$\vec{F}(\vec{r}_0 + \vec{\rho}) = \frac{e}{c}[-v\vec{k}; (H + \rho\frac{\partial H}{\partial y})\vec{i}] = -v\frac{e}{c}(H + \rho\frac{\partial H}{\partial y})[\vec{k}; \vec{i}] = -\frac{e}{c}v(H + \rho\frac{\partial H}{\partial y})\vec{j}.$$

Теперь можно подсчитать среднюю силу:

$$< \vec{F} >= \frac{\vec{F}(\vec{r}_0 + \vec{\rho}) + \vec{F}(\vec{r}_0)}{2} = \frac{1}{2}(-\frac{e}{c}(H + \rho\frac{\partial H}{\partial y})v + \frac{e}{c}Hv)\vec{j} = -\frac{1}{2}\frac{e}{c}v\rho\frac{\partial H}{\partial y}\vec{j}.$$

Подставив значение ларморовского радиуса в последнее выражение, получим

$$< \vec{F} >= -\frac{1}{2}\frac{e}{c}v\frac{mvc}{eH}\frac{\partial H}{\partial y}\vec{j} = -\frac{mv^2}{2}\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial y}\vec{j}.$$

Обозначив $\frac{mv^2}{2} = E_{кин}$, получим

$$< \vec{F} >= -E_{кин}\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial y}\vec{j}.$$

Отсюда следуют такие выводы:

1) При наличии градиента магнитного поля дрейф происходит в том направлении, в котором изменяется поле, в данном случае в направлении y, поскольку $\frac{\partial H}{\partial y} \neq 0$.

2) Дрейф происходит в сторону уменьшения поля, например, если $\frac{\partial H}{\partial y} < 0$, то $< \vec{F}_y >> 0$.

3) Скорость дрейфа пропорциональна энергии частицы $E_{кин}$.

4) Скорость дрейфа пропорциональна градиенту поля $\frac{\partial H}{\partial y}$.

5) Скорость дрейфа обратно пропорциональна величине поля H.