Преобразование векторов из декартовой системы координат в сферическую и наоборот.

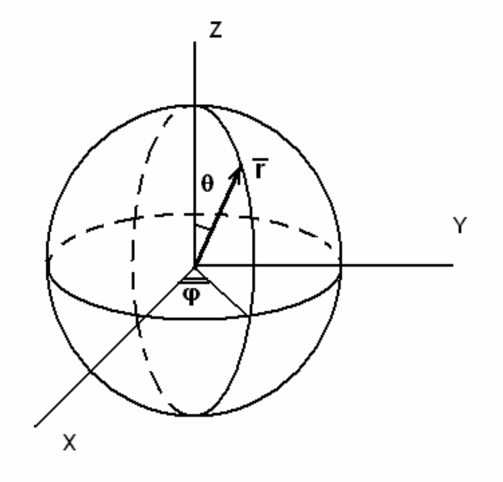

Рис. 1. Определение сферических координат.

Целью данной главы является получение формул, которые позволяют находить проекции векторов в сферической системе координат по известным декартовым проекциям, а также указать общий способ таких преобразований.

Как известно, сферические координаты вводятся с помощью соотношений:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Введем декартов базис $(\overline{n}_x, \overline{n}_y, \overline{n}_z)$ и сферический $(\overline{n}_r, \overline{n}_\theta, \overline{n}_\varphi)$. Тогда произвольный вектор $\overline{B}$ записывается в них как $\overline{B} = \overline{n}_x B_x + \overline{n}_y B_y + \overline{n}_z B_z$ в декартовой системе, и $\overline{B} = \overline{n}_r B_r + \overline{n}_\theta B_\theta + \overline{n}_\varphi B_\phi$ в сферической.

Проекцию вектора на орт находят как скалярное произведение вектора на данный орт.

$$\begin{cases} B_r = (\overline{B}, \overline{n}_r) \\ B_\theta = (\overline{B}, \overline{n}_\theta) \\ B_\varphi = (\overline{B}, \overline{n}_\varphi) \end{cases}$$

Значит, если мы запишем вектора $(\overline{n}_r, \overline{n}_\theta, \overline{n}_\varphi)$ в декартовой системе, то автоматически вычислим нужные нам проекции в сферической системе.

Находим орты.

$$\begin{cases} \overline{n}_r = \overline{n}_x \sin\theta\cos\varphi + \overline{n}_y \sin\theta\sin\varphi + \overline{n}_z \cos\theta \\ \overline{n}_\theta = \overline{n}_x \cos\theta\cos\varphi + \overline{n}_y \cos\theta\sin\varphi - \overline{n}_z \sin\theta \\ \overline{n}_\varphi = -\overline{n}_x \sin\varphi + \overline{n}_y \cos\varphi \end{cases}$$

Обозначим

$$C = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда эти соотношения можно записать в матричном виде, как
$(\overline{n}_r, \overline{n}_\theta, \overline{n}_\varphi) = (\overline{n}_x, \overline{n}_y, \overline{n}_z)C$

Скалярно умножая это соотношение на $\overline{B}$ получаем
$(B_r, B_\theta, B_\varphi) = (B_x, B_y, B_z)C$

Нужно заметить, что в последней формуле все проекции (B_x, B_y, B_z) должны быть выражены через координаты (r, θ, φ).

Если требуется обратное преобразование, его можно найти аналогично, но поскольку у нас уже есть матрица преобразования, то найти декартов базис через сферический можно умножив его на обратную матрицу $(\overline{n}_x, \overline{n}_y, \overline{n}_z) = (\overline{n}_r, \overline{n}_\theta, \overline{n}_\varphi)C^{-1}$
А для векторов $(B_x, B_y, B_z) = (B_r, B_\theta, B_\varphi)C^{-1}$.

Найдем C^{-1}. Нетрудно убедиться, что $\det C = 1$, и что $C^{-1} = C^T$, то есть

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$